Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в подготовке выборки для обучения искусственной нейронной сети [1]

Семёнов Е. В.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: semyonov@math.tsu.ru

Аннотация

В данной статье, ниже, рассматриваются два способа решения прямой задачи электроимпедансной томографии. В результате решения прямой задачи становится известен набор данных, позволяющих решить обратную задачу и сравнить результаты полученного решения с исходным. Различные вариации начальных данных для решения прямой задачи позволяют получить разнообразные независимые наборы напряжения, тока, а также проводимостей исследуемой области. Из полученных результатов легко составить выборку для обучения искусственной нейронной сети.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, прямая задача, МКО, численное решение.

Прежде чем решать обратную задачу, необходимо поставить прямую задачу, в результате решения которой, будут найдены элементы выборки, используемые искусственной нейронной сетью при обучении и получении решения обратной задачи.

Прямая задача электроимпедансной томографии в двумерном случае была поставлена следующим образом [1, 2]:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma\left(x,y\right)\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0;\\
&\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}=0,\ (x,y)\notin E_l,\ l=\overline{1,L};\\
&u\left(x,y\right)+z_l\sigma\left(x,y\right)\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}=U_l,(x,y)\in E_l;\\
&\sum_{i=1}^{L}U_i=0.
\end{aligned}$$

Здесь $\sigma\left(x,y\right)$ - электрическая проводимость, $l=\overline{1,L}$ номер электрода, z_l - сопротивление соответствующего электрода, U_l - напряжение на соответствующем электроде, $u\left(x,y\right)$ - потенциал, L - количество электродов.

[1] Работа выполнена по Государственному Заданию Министерства образования и науки РФ, №5.628.2014/K.

Область определения задачи представлена в качестве круга, или другой замкнутой области. Областью значений выступают распределения тока и напряжения на границе.

Предложенная задача имеет две постановки [1, 2]. В первом случае, как представлено выше, мы задаем напряжение на электродах и находим ток $\{I_l\}_{l=1}^{L}$ на каждом из них. Во втором случае задаются значения тока $I_l = \int\limits_{E_l} \sigma \frac{\partial u}{\partial n} dl$ на каждом электроде, а затем ищем на них напряжение U_l.

В качестве σ будем рассматривать кусочно-постоянную функцию.

Рассмотрим далее решение прямой задачи в первом случае, когда заданы напряжения на электродах.

В данной статье используется вариант для случая $\sigma(x, y) = const$, основанный на решении, предложенном в 2011 году Евгением Демиденко для круга радиусом R [3]. В этом случае удобно записать постановку из предыдущего раздела в полярной системе координат.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \quad \varphi \notin [\theta_i - w, \theta_i + w], \; i = \overline{1, L};$$

$$\left[u(r,\varphi) + z_i \sigma(r,\varphi) \frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]_{r=R} = U_{i,} \quad \varphi \in [\theta_i - w, \theta_i + w];$$

$$\sum_{i=1}^{L} U_i = 0,$$

где θ_i - середина электрода с номером i, w - полуширина электрода, n - вектор нормали к поверхности границы в точке (R, φ), L - количество электродов.

Идея метода, предложенного Евгением Демиденко, заключается в нахождении функции решения в виде бесконечного ряда Фурье.

$$u(r,\varphi) = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi)).$$

Подставив данное решение в наше дифференциальное уравнение получаем тождество, следовательно, такое представление решения оправдано.

$$\frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-1}(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n-1)}{R^2}\left(\frac{r}{R}\right)^{n-2}(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))-$$

$$-\frac{1}{r^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^{n}\left(a_n n^2\cos(n\varphi)+b_n n^2\sin(n\varphi)\right)=0;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{r^{n-2}}{R^n}(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{r^{n-2}}{R^n}(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}n\frac{r^{n-2}}{R^n}(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}n^2\frac{r^{n-2}}{R^n}(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))\equiv 0.$$

Коэффициенты a_n и b_n ряда Фурье находятся из граничного условия

$$\sigma\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\Bigg|_{r=R}=\begin{cases}\frac{U_i-u(R,\varphi)}{z_i} & ,\varphi\in[\theta_i-w,\theta_i+w]\\ 0 & \varphi\notin[\theta_i-w,\theta_i+w]\end{cases},\ i=\overline{1,L},$$

путем умножения обоих частей на $\cos(k\varphi)$, $k\geq 1$ и интегрирования по φ в пределах $(0,2\pi)$. После чего обе части умножают на $sin(k\varphi)$, $k\geq 1$ и снова интегрируют по φ в пределах $(0,2\pi)$.

Из вида решения, представленного выше видно, что:

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\Bigg|_{r=R}=\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n\cos(n\varphi)+b_n\sin(n\varphi))$$

Для упрощения выражений в вычислениях используются свойства ортогональности косинусов и синусов, а также известное вычисление интеграла:

$$\int_{\theta_i-w}^{\theta_i+w}\cos(k\varphi)\,d\varphi=\frac{2}{k}\sin(wk)\cos(\theta_i k)$$

В первом случае получаем уравнение:

$$\sigma\frac{\pi n a_n}{R}=\sum_{i=1}^{L}\frac{U_i}{z_i}\frac{2}{k}\sin\left(wk\right)\cos\left(\theta_i k\right)-\sum_{i=1}^{L}\frac{u_0}{z_i}\frac{2}{k}\sin\left(wk\right)\cos\left(\theta_i k\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{\cos\left(\left(k+n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k+n\right)w\right)}{k+n}\right]/z_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{\cos\left(\left(k-n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k-n\right)w\right)}{k-n}\right]/z_i+$$

$$+\frac{b_n}{z_i}\frac{\sin\left(\left(k+n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k+n\right)w\right)}{k+n}-\frac{b_n}{z_i}\frac{sin\left(\left(k-n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k-n\right)w\right)}{k-n}$$

Во втором случае получим следующее уравнение:

$$\sigma\frac{\pi n b_n}{R}=\sum_{i=1}^{L}\frac{U_i}{z_i}\frac{2}{k}\sin\left(wk\right)\cos\left(\theta_i k\right)-\sum_{i=1}^{L}\frac{u_0}{z_i}\frac{2}{k}\sin\left(wk\right)\cos\left(\theta_i k\right)-$$

$$-\sum_{i=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{\sin\left(\left(k+n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k+n\right)w\right)}{k+n}\right]/z_i-$$

$$-\sum_{i=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left[\frac{\sin\left(\left(k-n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k-n\right)w\right)}{k-n}\right]/z_i+$$

$$+\frac{b_n}{z_i}\frac{\cos\left(\left(k+n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k+n\right)w\right)}{k+n}-\frac{b_n}{z_i}\frac{\cos\left(\left(k-n\right)\theta_i\right)sin\left(\left(k-n\right)w\right)}{k-n}$$

Затем просто проинтегрируем представление граничного условия по φ в пределах $(0,2\pi)$ для получения уравнения, содержащего u_0. Получим:

$$\sum_{i=1}^{L}2w\frac{u_0}{z_i}+$$

$$+\sum_{i=1}^{L}\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\frac{2}{n}\sin(wn)\cos(\theta_i n)+b_n\frac{2}{n}\sin(wn)sin(\theta_i n)\right]/z_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{L}2w\frac{U_i}{z_i}.$$

Далее вводятся обозначения:

$$M_{11ikn} = \int\limits_{\theta_i - w}^{\theta_i + w} \cos(k\varphi)\cos(n\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{\cos((k+n)\,\theta_i)\,sin\,((k+n)\,w)}{k+n} + \frac{\cos((k-n)\,\theta_i)\,sin\,((k-n)\,w)}{k-n};$$

$$M_{12ikn} = \int\limits_{\theta_i - w}^{\theta_i + w} \cos(k\varphi)\,sin\,(n\varphi)\,d\varphi =$$

$$= \frac{\sin((k+n)\,\theta_i)\,sin\,((k+n)\,w)}{k+n} - \frac{sin\,((k-n)\,\theta_i)\,sin\,((k-n)\,w)}{k-n};$$

$$M_{22ikn} = \frac{\cos((k+n)\,\theta_i)\,sin\,((k+n)\,w)}{k+n} - \\ - \frac{\cos((k-n)\,\theta_i)\,sin\,((k-n)\,w)}{k-n}.$$

Также вводятся бесконечномерный вектор $\overline{a} = (a_1, a_2, ...)$, бесконечномерный вектор $\overline{b} = (b_1, b_2, ...)$ и бесконечномерные вектора $\overline{r_{1i}}$, $\overline{r_{2i}}$ с компонентами:

$$r_{1in} = \frac{2}{n}\sin(wn)cos(\theta_i n),\ r_{2in} = \frac{2}{n}\sin(wn)sin(\theta_i n).$$

Представим в матричном виде член $\sigma\frac{\pi n}{R}$, как $\sigma\frac{\pi}{R}\mathrm{N}$, где N - бесконечномерная диагональная матрица из натуральных чисел.

Тогда получим следующее:

$$\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} M_{11i}\overline{a} + \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} M_{12i}\overline{b} + \sigma\frac{\pi\mathrm{N}}{R}\overline{a} + \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} u_0 \overline{r_{1ik}} = \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} U_i \overline{r_{1ik}};$$

$$\sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} M_{21i}^{T}\overline{a} + \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} M_{22i}\overline{b} + \sigma\frac{\pi\mathrm{N}}{R}\overline{b} + \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} u_0 \overline{r_{2ik}} = \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} U_i \overline{r_{2ik}};$$

$$a' \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\overline{r_{1i}} + b' \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1}\overline{r_{2i}} + 2wu_0 \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} = 2w \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} U_i,$$

где $Z_i = Z$ постоянное сопротивление на каждом электроде, a' - расширенный вектор $\overline{a}$, увеличенный на значение $2w$, b' - расширенный вектор $\overline{b}$, увеличенный на значение $2w$.

Доказано также, что если электроды располагаются на одном расстоянии и имеют одинаковое сопротивление, из третьего уравнения вытекает $u_0 = 0$, т.к. сумма напряжений равна нулю, а также $\sum\limits_{i=1}^{L} r_{jin} = 0,\ j = \overline{1,2}$. Также введем вектор $r_{ni} = (\overline{r_{1in}}, \overline{r_{2in}}, 2w)$ и

матрицу
$$M_i = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} & r_{1i} \\ M_{21}^T & M_{22} & r_{2i} \\ {r_{1i}}^T & {r_{2i}}^T & 2w \end{pmatrix}.$$

Приведем систему к привычному виду $A\bar{x} = \bar{d}$. В качестве вектора $\bar{x}$ будем рассматривать вектор с компонентами $(a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots, u_0)$, в качестве вектора $\bar{d} = \left(\sum\limits_{i=1}^{L} \frac{U_i}{z_i} r_{0i}, \sum\limits_{i=1}^{L} \frac{U_i}{z_i} r_{1i}, \ldots\right)$, тогда матрица A в общем случае примет вид:
$$A = \left(\sigma \frac{\pi}{R} \begin{pmatrix} \mathrm{N} & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^{L} Z_i^{-1} M_i \right).$$

В результате, решая СЛАУ, мы получаем все неизвестные, необходимые для получения распределения тока на границе области.

Список литературы

[1] Самарский А. А, Тихонов А. Н. Методы математической физики // Учебное пособие для вузов. — 5-е изд., стереотип. М.: Наука. 1977. С. 735 : ил.

[2] Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. С. 336.

[3] Demidenko E. Analytic solution to homogeneous EIT problem on the 2D disk and its application of electrode contact impedances // Physiol. Meas. 2011. V. 32. P. 1453 – 1471.

В начале работы рассматривается постановка двумерной прямой задачи электроимпедансной томографии (ЭИТ) в полярной системе координат. Областью решения задачи является круг радиуса R с центром в начале координат. Предполагается, что среда внутри круга является изотропной ($\sigma = const$). В качестве граничных условий была выбрана наиболее успешная для решения подобного рода задач в настоящее время полная электродная модель (CEM). В математическом смысле, описанная задача имеет следующий вид:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,\varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\left.\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right|_{r=R} = 0, \quad \varphi \notin [\theta_i - w, \theta_i + w]\,,\ i = \overline{1, L};$$

$$\left[u(r,\varphi) + z_i\sigma\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}\right]_{r=R} = U_i,\ \ \varphi \in [\theta_i - w, \theta_i + w]\,;$$

$$\sum_{i=1}^{L} U_i = 0,$$

Здесь θ_i - середина электрода с номером i, w - полуширина электрода, z_i - сопротивление соответствующего электрода, U_i - напряжение на соответствующем электроде, $u(r,\varphi)$ - потенциал, L - количество электродов.

Следом за поставкой прямой задачи в работе приводится описание способов её численного решения, в результате которого становится известно распределение потенциала u внутри круга. Используя значения потенциала на границе области, для каждого электрода рассчитывается величина инжектируемого тока I_i. Из значений напряжения и тока на каждом электроде формируется вектор $\overline{x} = (\overline{U}, \overline{I})$, который группируется со значением проводимости σ в пару $\{\overline{x}, \sigma\}$. В последствии, задавая различное напряжение на электродах и проводимость среды, решалась прямая задача. Полученный набор пар объединялся в обучающую выборку для нейронной сети.

Для решения обратной задачи была выбрана многослойная нейронная сеть[1], на вход которой подавался вектор $\overline{x}$ из пары обучающей выборки, а на выходе сети сравнивались полученное число и значение проводимости σ из соответствующей пары $\{\overline{x}, \sigma\}$. Обучение сети проводилось по правилу обратного распространения ошибки.

Работа содержит полученные результаты о точности решения обратной задачи, описание способов подбора параметров нейронной сети, а также исследование их влияния на качество полученного решения. В завершении описан способ решения обратной задачи в круге с неоднородностью.

Список литературы

[1] Семёнов Е. В. Использование теории искусственных нейронных сетей для решения обратной задачи // Молодежь, наука, технологии: идеи и перспективы (МНТ-2014). Материалы I Международной научной конференции студентов и молодых ученых // Томск: Изд-во Том. гос. архит.-строит. ун-та. – 2014. – 667 (615–616) с.