

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Механико-математический факультет

**Молодежная научная конференция
«Все грани математики и механики»
(24–30 апреля 2015 г.)**

Сборник статей

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора А.В. Старченко

Томск
Издательский Дом Томского государственного университета
2015

УДК 51
ББК 22
М754

М754 Молодежная научная конференция «Все грани математики и механики» : сборник статей / под ред. А.В. Старченко. – Томск : Издательский Дом Томского государственного университета, 2015. – 184 с.

ISBN 978-5-94621-518-3

В сборнике представлены статьи, посвященные актуальным проблемам математики и механики, а также современным подходам и методам решения фундаментальных и прикладных задач.

Для студентов, аспирантов, молодых ученых.

УДК 51
ББК 22

ISBN 978-5-94621-518-3 © Томский государственный университет, 2015
© Авторы статей, 2015

Решение обратной одномерной задачи электроимпедансной томографии с помощью нейронных сетей

Е.В. Семёнов

Томский государственный университет

E-mail: semyonov@math.tsu.ru

Искусственные нейронные сети позволяют решать задачи, где обычные алгоритмы и методы применять затруднительно. Они обучаются путем изменения весовых коэффициентов, связывающих отдельные нейроны, по заданной обучающей выборке, включающей в себя векторы входных значений и соответствующие им векторы, которые ожидаются на выходе из сети.

Ключевые слова: искусственные нейронные сети, обратная задача, персептрон, алгоритм обратного распространения ошибки.

Рассматривается прямая одномерная задача электроимпедансной томографии [1] в стержне длиной Lx с заданными границами сред (x_1, x_2, \dots) , а также проводимостями $(\sigma_0, \sigma_1, \dots)$ каждой из подобластей области стержня. Используя приведенные данные рассчитывается разность потенциалов на концах стержня по следующим формулам:

$$\frac{d}{dx} \left(\sigma \frac{du}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \sigma \frac{du}{dx} = I = const$$
 – постановка дифференциальной задачи.

Переходим к разностной постановке, заменяя дифференциальный оператор разностным. Непрерывную область стержня необходимо разбить на некоторое количество участков с шагом $h = \frac{Lx}{N-1}$, где N – количество точек разбиения области. Получим разностное уравнение

$$\sigma_i \frac{du_i}{dx_i} = I = const$$
. Зададим условия на каждой границе области:

$$x = x_0 = 0 : z_1 \sigma_0 \frac{du_1}{dx} + u_1 = U_L ; \sigma_0 \frac{du_1}{dx} = I_L ;$$

$$x = x_1 : \sigma_0 \frac{du_1}{dx} = \sigma_1 \frac{du_2}{dx}, u_1 = u_2 ;$$

...

$$x = x_{n-1} : \sigma_{n-2} \frac{du_{n-1}}{dx} = \sigma_{n-1} \frac{du_n}{dx}, u_{n-1} = u_n ;$$

$$x = x_n = L : z_n \sigma_{n-1} \frac{du_n}{dx} + u_n = U_R ; \sigma_{n-1} \frac{du_n}{dx} = I_R ;$$

Зададим граничные условия для нашей разностной задачи:

$$x = x_0 = 0 : z_1 I + u_1 = U_L = 0,$$

где z_1 – сопротивление левого электрода, $I = I_L = I_R$ – приложенный ток, u_1 – искомая функция изменения потенциала в области стержня, U_L – приложенное к левому концу стержня напряжение.

$$x = x_n = Lx : z_n I + \sum_{i=1}^n \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - z_1 I + U_L = U_R,$$

где z_n – сопротивление правого электрода, σ_i – сопротивление подобласти (x_i, x_{i+1}) , U_R – напряжение на правом конце стержня.

Второе граничное условие вытекает из решения прямой задачи, при расчете изменения потенциала в каждой точке подобласти:

$$u_i(x) = \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x - x_{i-1}) + C \Rightarrow u_i(0) = -z_1 I \Rightarrow u_i(x) = \frac{I}{\sigma_0} x - z_1 I + U_L;$$

$$u_2(x) = \frac{I}{\sigma_1} (x - x_1) + C \Rightarrow u_2(x_1) = C = \frac{I}{\sigma_0} x_1 - z_1 I + U_L \Rightarrow$$

$$u_2(x) = \frac{I}{\sigma_1} (x - x_2) + \frac{I}{\sigma_0} x_1 - z_1 I + U_L;$$

...

$$u_{n-1}(x) = \frac{I}{\sigma_{n-2}} (x - x_{n-2}) + \sum_{i=1}^{n-2} \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - z_1 I + U_L;$$

$$u_n(x) = \frac{I}{\sigma_{n-1}} (x - x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{I}{\sigma_{i-1}} (x_i - x_{i-1}) - z_1 I + U_L;$$

Для успешного решения задачи также необходимо условие сопряжения на границах области:

$$U_L + U_R = 0; U_L = -U; U_R = U \Rightarrow U = \frac{I}{2} \left[z_n - z_1 + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - x_{i-1})}{\sigma_{i-1}} \right].$$

После решения набора прямых задач имеем некоторую выборку, которую можно компоновать как угодно для решения обратной задачи. Решение обратной задачи, в свою очередь, разбивается на два случая.

Первый случай. Известна разность потенциалов на концах стержня, а также проводимости подобластей области стержня. Необходимо решить обратную задачу по нахождению местоположения и размера каждой из подобластей области стержня (x_i, x_{i+1}) . Сначала решалась задача по

нахождению размера одной подобласти, после успешного решения (для значений из выборки достигнута точность порядка 10^{-26} за 5 прогонок выборки через сеть, для значений не из выборки 10^{-10}) была поставлена задача нахождения размера нескольких подобластей, больше одной. С такой задачей сеть справилась более чем успешно (погрешность выходного значения сети с точным решение составила 10^{-11}). Т.к. зависимость искомого решения от известных величин была линейной (рис. 1), для аппроксимации подошла искусственная нейронная сеть с линейной функцией активации.

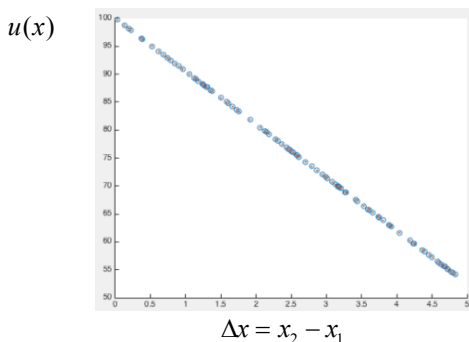


Рис. 1. Линейная зависимость разности потенциалов на концах области от размера подобласти с отличной от краевых проводимостью

При использовании искусственной нейронной сети с нелинейной функцией активации на всех слоях кроме последнего (последний слой линейный) сеть хуже сглаживала линейное решение (сеть обучалась за 1 000 итераций до 10^{-9} для значения из выборки, и с ошибкой 10^{-5} для значения не из выборки).

После этого задача была усложнена. Требовалось найти не только размер каждой из подобласти, но и их положение в диапазоне $(0, Lx)$. В результате сети не хватало входных данных, потому как от положения подобласти разность потенциалов не зависела (рис. 2). Было принято решение дополнить выборку значением интеграла области под графиком изменения потенциала. При такой выборке было очевидно, что значение интеграла зависит от положения подобластей и несет существенную информацию на входе искусственной нейронной сети. После расширения выборки сеть справилась с задачей как для одной подобласти с отличной

проводимостью (ошибка 10^{-5}), так и для более одной подобласти с отличной от крайних подобластей области стержня (ошибка 10^{-3}). Результаты рассчитывались для выборки размером 100 векторов, пределом обучения считалась прогонка всей выборки до 1 000 раз, или достижение погрешности на выходе сети порядка 10^{-25} . Не всегда было удобно брать большую выборку. Для линейных зависимостей решения вполне подходила выборка из двух векторов. Это вызвано тем, что линейная ИНС аппроксимирует линейную функцию, а, как известно, для того чтобы провести прямую, достаточно пары точек.

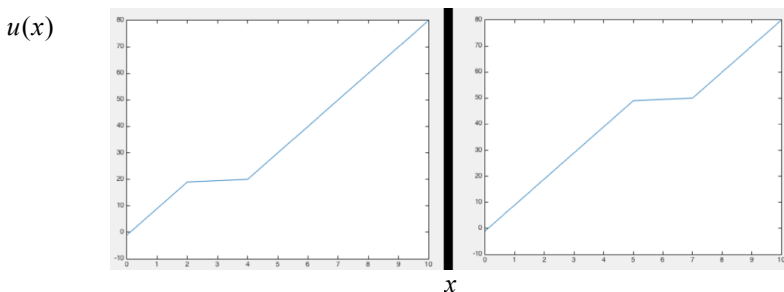


Рис. 2. Отсутствие зависимости разности потенциалов от положения подобласти с отличной проводимостью

Второй вариант. Известна разность потенциалов на концах стержня, а также положение и размеры подобластей области стержня. Требуется решить обратную задачу по нахождению проводимостей всех подобластей. Сначала решалась задача с одной подобластью, проводимость которой отличалась от проводимостей подобластей на краях стержня. В этом случае сети не было достаточно иметь на входе лишь разность потенциалов и положение подобласти с ее размером. Это вызвано тем, что через одну область «преломления» потенциала можно провести сколь угодно много наклонных прямых (рис. 3), зависящих от проводимости. Т.е. проводимости сред не определялись однозначно. Для решения этой проблемы выборка сети была расширена на значение отношения проводимости внутренней подобласти к проводимости одной из крайних подобластей. В результате сеть смогла определить достаточно точные значения проводимостей (ошибка 10^{-2}). Для усложнения задачи была выбрана область, содержащая более одной подобласти с проводимостью, отличной от проводимости крайних подобластей стержня. Значения отношений каждой

из таких подобластей к крайним только сбивало бы сеть, поэтому добавленное значение отношения проводимостей в выборку было также заменено на значения интеграла под графиком функции изменения потенциала.

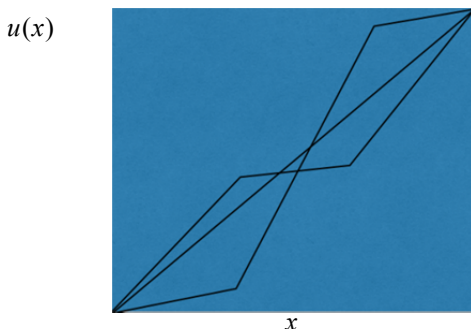


Рис. 3. При разных проводимостях одна и та же разность потенциалов
 $(u_1 = u_2 = \dots)$

Стоит отметить, что чем больше подобластей добавлялось в область стержня $(0, Lx)$, тем хуже сеть находила нужное решение. Для двух видов сред ошибка 10^{-2} , для трех видов сред ошибка 10^0 , для четырех видов сред 10^1 . Важной проблемой в нахождении проводимостей сред стало то, что потенциал возрастает на величину, обратную проводимости среды, в таком случае значения проводимостей больше единицы меняли потенциал, практически одинаково (рис. 4).

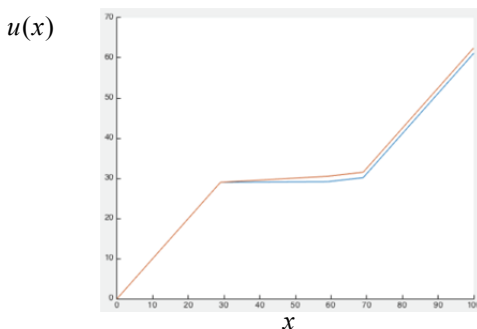


Рис. 4. Варьирование одной из проводимостей в 10 раз, дало изменение потенциала на величину порядка единицы

Например, если проводимость среды была 10, сеть без проблем могла определить его и как 7 и как 5, сославшись на ошибку подстройки весов и ограниченное количество итераций обучения, т.к. погрешность в таком случае была мала. Если же значения проводимостей (σ) были меньше единицы, то малое возмущение таких величин давало большое изменение обратного им значения $\left(\frac{1}{\sigma}\right)$. Такие значения проводимостей сеть нахо-

дила достаточно точно. Решением этой проблемы послужила нормализация выходных данных проводимостей, сеть находила значения проводимостей в интервале $(0,1]$, а далее выходные значения умножались на коэффициент нормализации, используемый при обучении сети.

Обратные задачи решались многослойными нейронными сетями с линейной выходной функцией активации и либо линейными, либо нелинейными (сигмоид, тангенс гиперболический) функциями активации скрытых слоев [2]. Количество нейронов в каждом из скрытых слоев варьировалось от сложности решаемой задачи. Исследования зависимости точности решения от количества используемых слоев не проводилось. Огромное влияние на обучение сети оказал параметр скорости обучения сети. Существуют множество способов подбора этого параметра, но все они зависят от множества факторов сети. Нет универсального способа, который бы справился с подбором лучшего значения для этого параметра, или изменения его в ходе обучения.

Правило, по которому обучалась нейронная сеть, носит название «алгоритм обратного распространения ошибки». Главная идея этого алгоритма заключается в следующих двух этапах.

Первый этап. Сеть получает на вход вектор из выборки и в направлении от входа сети к ее выходу проводит с ним расчеты, получая на выходе выходной вектор.

Второй этап. Сеть находит вектор ошибки на выходе сети, после чего пропускает этот вектор аналогично, только в обратном порядке, от выхода сети к ее входу. Тем не менее, на вектор также действуют все пороговые весовые коэффициенты нейронов, а также весовые коэффициенты, связывающие нейроны разных слоев. В результате, на каждом слое, каждый из нейронов имеет некоторый вектор ошибки, рассчитанный специальным образом, корректирующий лишь ту погрешность, которую мог внести отдельный нейрон отдельного слоя.

В основе данного правила обучения лежит метод градиентного спуска, поэтому для успешной реализации алгоритма необходимо, чтобы все

функции активации нейронной сети были дифференцируемы. Формулы, по которым производится обучение ИНС, представлены ниже:

$$y_j^i = f\left(\sum_{k=1}^{IN} w_{j,k}^i y_k^{i-1}\right); IN = KN_{i-1}; j = \overline{1, OUT}; OUT = KN_i; i = \overline{1, Kol_Sl}. \quad \text{По}$$

данной формуле производятся преобразования входного вектора i -го слоя ИНС в выходной. Здесь IN – размерность входного вектора, KN_i – количество нейронов i -го слоя ИНС, Kol_Sl – общее количество слоев ИНС, $w_{j,k}^i$ – весовой коэффициент i -го слоя, соединяющий j -й нейрон i -го слоя с k -м нейроном $i-1$ -го слоя.

$e_j^i = d_j^i - y_j^i; j = \overline{1, OUT}; OUT = KN_i; i = \overline{1, Kol_Sl}$. По данной формуле производится вычисление ошибки выходного слоя ИНС. l – порядковый номер вектора из выборки, e_j^l – j -я компонента вектора ошибки i -го слоя, d_j^l – j -я компонента вектора точного решения на выходе сети, y_j^l – j -я компонента выходного вектора сети на i -ом слое.

Формула для расчета ошибки для каждого слоя ИНС, по алгоритму обратного распространения ошибки имеет вид:

$$e_j^i = \sum_{k=1}^{OUT} (w_{j,k}^i)' e_k^{i+1}; j = \overline{1, IN}; i = \overline{1, Kol_Sl} - 1.$$

η – параметр скорости обучения сети.

Формула для корректировки весовых коэффициентов, функция активации которых является сигмоидом имеет вид:

$$w_{j,k}^{i+1} = w_{j,k}^i + \eta e_j^i y_j^i (1 - y_j^i) y_k^{i-1}; k = \overline{1, IN}; j = \overline{1, OUT}; i = \overline{1, Kol_Sl}. \quad \text{Здесь}$$

множитель $y_j^i (1 - y_j^i)$ есть первая производная от сигмоида. При использовании линейной функции на выходном слое, этот множитель заменяется единицей.

При реализации нейронной сети было замечено, что если не использовать пороговое смещение нейронов, при входном нулевом значении на выходе сети тоже получался ноль. Значит, решение должно проходить через точку $(0, 0)$, но это недопустимо, ведь если даже область «преломления» будет иметь нулевую длину, это не значит, что потенциал не изменится, если же и подобласть вне этой области. В связи с этим, попытка аппроксимировать прямую линейной нейронной сетью без использования порогового смещения нейронов, не приводила к качественному результату. Сеть пыталась минимизировать ошибку по всей выборке, но

строила аппроксимируемую прямую, проходящую через точку $(0, 0)$ (рис. 5).

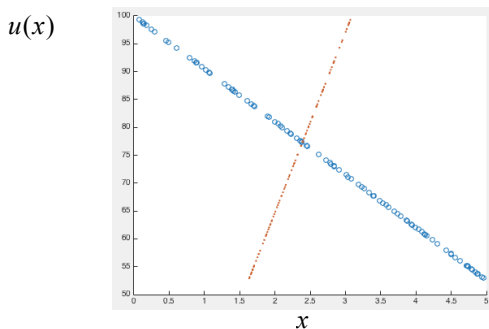


Рис. 5. Неиспользование порогового смещения в линейной ИНС

При использовании нелинейной ИНС кривая могла изогнуться, пройдя и через точку $(0, 0)$ и по прямой, представленной выборкой. Однако нелинейная сеть не достаточно хорошо аппроксимировала прямую, поэтому целесообразно было использовать линейную функцию активации на всех нейронах сети, а также пороговые смещения всех нейронов всех слоев сети.

Работа выполнена по Государственному заданию Министерства образования и науки РФ, №5.628.2014/К.

Литература

1. Пеккер Я.С. Электроимпедансная томография. Томск : Изд-во НТЛ, 2004. 298 с.
2. Ratajewicz-Mikolajczak E., Shirkoohi G.H., Sikora J. Two ANN reconstruction methods for electrical impedance tomography. IEEE Trans // On Magnetics. 1998. № 34. P. 2964–2967.